MATEMAATIKA RIIGIEKSAM 2010

Eksami eesmärk

Matemaatika riigieksami peamisteks eesmärkideks on:

- teada saada, kui struktureeritud ja korrastatud on gümnaasiumilõpetaja matemaatikaalased teadmised;
- selgitada välja, kui hästi suudab õpilane õpitut rakendada (näiteks lahendada mitterutiinseid ülesandeid);
- teada saada, milline on gümnaasiumilõpetajate matemaatikaalane ettevalmistus õpingute jätkamiseks järgmisel haridusastmel.

Eksami vorm

Matemaatika riigieksami põhieksam on **kahes** variandis ja lisaeksam on **ühes** variandis.

Matemaatika riigieksam (ja ka lisaeksam) on kaheosaline kirjalik eksam – 1. osa kestus on 120 minutit ja 2. osa kestus on 150 minutit. Kahe eksamiosa vahel on 45 minutiline vaheaeg.

Käesoleva õppeaasta matemaatika riigieksam toimub **4. mail 2010.a, algusega kell 10.00.** Eksaminandidele, kes mõjuvatel põhjustel põhieksamil osaleda ei saa, korraldatakse lisaeksam **17. mail 2010.a, algusega kell 10.00**.

Eksami 1. osa ülesannetega kontrollitakse gümnaasiumi ainekursuste põhiteadmiste ja -oskuste omandatust ning oskust neid teadmisi ja oskusi rakendada elulistes situatsioonides. Eksami 2. osa ülesannetega kontrollitakse, kuivõrd struktureeritud on eksaminandi teadmised, kui hästi ta suudab õpitud teadmisi seostada ja rakendada mitterutiinsete ülesannete korral ning milline on eksaminandi ettevalmistus õpingute jätkamiseks järgmisel haridusastmel (vt „Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava“; http://www.riigiteataja.ee/ert/act.jsp?id=174787).

Matemaatika riigieksami 1. osas tuleb lahendada 5 (viis) 10-punktilist kohustuslikku ülesannet ja 2. osas 3 (kolm) ülesannet – 2 (kaks) 15-punktilist kohustuslikku ülesannet ja 1 (üks) 20-punktiline valikülesanne, mille eksaminand valib kahe erinevasse ainevaldkonda kuuluva 20-punktilise ülesande hulgast. Kokku tuleb eksaminandil lahendada 8 (kaheksa) ülesannet. Kõikide õigesti lahendatud ülesannete eest kokku on võimalik saada maksimaalselt 100 punkti.
Eksam loetakse sooritatuks, kui eksami 1. ja 2. osa hindepunktide summa on vähemalt 20 punkti.

Teooriaküsimusi 2010. a matemaatika riigieksamitöös iseseisvate ülesannetena ei esine.

Eksami korraldusest

Eksaminandid istuvad eksamiruumis ühe kaupa ja laudadevaheline kaugus peab olema piisav, et õpilased saaksid iseseisvalt ja häirimatult töötada.
Eksaminand kasutab eksamil isiklikke kirjutus– ja joonestusvahendeid ning taskuarvutit. Eksaminandidel ei ole lubatud eksamitöö ajal üksteisele kirjutus–, arvutus– ja joonestusvahendeid laenata. Lahendused tuleb kirjutada sinise või musta tindi– või pastapliiatsiga. Harilik pliiats on mõeldud vaid jooniste tegemiseks. Töö vormistamisel ei tohi

kasutada punast värvi ja korrektuurivedeliku ega –pliiatsit. Mobiiltelefoni kasutamine (mistahes eesmärgil) on keelatud.

Eksamikeskus tagab igale eksaminandile vihiku lahenduste vormistamiseks (eraldi vihik mõlema eksamiosa jaoks) ja paberi mustandi jaoks.

Riigieksamil ei ole lubatud kasutada teatmikke, käsiraamatuid ja muid abimaterjale.

Eksamiruumis ei tohi olla nähtaval kohal skeeme, pilte, tabeleid jm matemaatilist informatsiooni sisaldavaid materjale.

Eksami mõlema osa lõppedes annab eksaminand vastava eksamiosa lahenduste vihiku eksamikomisjonile. Need suletakse eksamikomisjoni poolt ümbrikutesse ja saadetakse Eksamikeskusesse, kus neid hindab haridus- ja teadusministri määrusega kinnitatud komisjon. Mustandid säilitatakse koolis.

Hindamiskomisjon ei loe ega hinda hariliku pliiatsiga kirjutatud lahendusi ega mustandipaberile kirjutatut.

Nõutavad teadmised ja oskused

Matemaatika riigieksam ei ole 12. klassi lõpueksam, vaid kogu koolimatemaatika põhiteadmiste ja –oskuste omandatust kontrolliv eksam.

Eksamiülesannete koostamisel eeldatakse, et eksaminand on (minimaalselt) läbinud järgmised ainekursused:

1. Reaalarvud. Võrrandid ja võrratused.
2. Trigonomeetria.
3. Vektor tasandil. Joone võrrand.
4. Funktsioonid I, II.
5. Funktsiooni piirväärtus ja tuletis.
6. Tõenäosusteooria ja kirjeldav statistika.
7. Stereomeetria.

Riigieksamiülesannete koostamisel lähtutakse riiklikus õppekavas esitatud nõuetest (vt „Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava"; http://www.riigiteataja.ee/ert/act.jsp?id=174787).

Eksamiülesannete lahenduste näiteid (2008/2009 õ-a riigieksami põhjal)

1. (10 punkti) Lihtsustage avaldis $\left[\frac{a}{a^2-2ab+b^2}-\frac{a}{(a+b)^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{a^2}-b^{-2}\right)^2$ ja leidke avaldise täpne väärtus, kui $a=-4+\log_5 125$ ja $b=\sqrt[3]{2}$.

Lahendus....$=\left[\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{a}{(a+b)^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2=\frac{a(a+b)^2-a(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}\cdot\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)^2=$

$=\frac{a\left(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2\right)\cdot(b-a)^2(b+a)^2}{(a-b)^2(a+b)^2\cdot a^4b^4}=\frac{4}{a^2b^3}$;

Avaldise väärtuse arvutamine.

Kui $a=-4+\log_5 125=-4+3=-1$ ja $b=\sqrt[3]{2}$, siis $\dfrac{4}{(-1)^2\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\dfrac{4}{1\cdot 2}=2$.

Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti algebralise avaldise lihtsustamise oskust ja logaritmi mõiste tundmist. Eksaminandide poolt tehtud vead on paljude aastate jooksul ikka ühed ja samad – ei tunta algebra valemeid, ei osata leida ühist nimetajat ja laiendajaid, ei teata, mida tähendab negatiivne astendaja, ei osata põhitehteid (astendamine, jagamine, taandamine) harilike murdudega. Vaatamata sellele, et arvutada tuli avaldise täpne väärtus, tehti arvutused taskuarvutil, mille tõttu saadi ebatäpne (ümardatud) vastus.

2. (10 punkti) 30 õpilasest puudus matemaatika tunnist 20%. Puudujatest $\frac{1}{3}$ olid tüdrukud ja see moodustas 20% klassi tüdrukute koguarvust.
Mitu poissi oli matemaatika tunnis?
Selles samas matemaatika tunnis kutsuti tahvli juurde juhuslikult
1) üks õpilane. Kui suur on tõenäosus, et see õpilane oli tüdruk?
2) kaks õpilast. Kui suur on tõenäosus, et üks neist oli tüdruku ja teine poiss?
3) neli õpilast. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt 3 neist olid poisid?

Lahendus. 30 õpilasest puudus 20% $\Rightarrow 0{,}2\cdot 30=6$ õpilast s.t tunnis oli 30 – 6 = 24 õpilast.
Puudujatest olid $\frac{1}{3}\cdot 6=2$ tüdrukud, klassis oli kokku $\frac{2\cdot 100}{20}=10$ tüdrukut ja tunnis oli 10 – 2 = 8 tüdrukut. Klassis oli 30 – 10 = 20 poissi, tunnist puudus $6-2=4$ poissi ja tunnis oli 16 poissi.

1) A: Tahvli juurde kutsuti tüdruk.

$$p(A)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}=0,(3)$$

2) B: Tahvli juurde kutsuti üks poiss ja üks tüdruk.

$$p(B)=\frac{C_{16}^1\cdot C_8^1}{C_{24}^2}=\frac{32}{69}=0{,}463$$

3) C: Tahvli juurde kutsuti 4 õpilast ja vähemalt 3 neist olid poisid s.t 3 poissi ja 1 tüdruk või 4 poissi.

$$p(C)=\frac{C_{16}^3\cdot C_8^1+C_{16}^4\cdot C_{18}^0}{C_{24}^4}=\frac{150}{253}=0{,}592$$

Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti protsentarvutuse tundmist ja klassikalise tõenäosuse arvutamise oskust. Ülesande teksti ei loetud hoolikalt ja väga paljud eksaminandid lahendasid tõenäosust puudutavad alaülesanded nii, et vaadeldavas matemaatika tunnis oli 30 õpilast. 3) alaülesandes jäi paljudel eksaminandidel märkamata sõna „vähemalt" ja üllatavalt paljude eksaminandide jaoks oli probleemiks saadud vastuse kriitiline hindamine (NB! Tulemus ei saa olla suurem kui 1, ega väiksem kui 0!)

3. (10 punkti) On antud funktsioon $f(x) = (x^2 - 4)(2x - 1)$.
Leidke selle funktsiooni
1) nullkohad;
2) negatiivsuspiirkond;
3) tuletis;
4) maksimumpunkti koordinaadid.

Lahendus.
1) $X_0: f(x) = 0$; $(x^2 - 4)(2x - 1) = 0$;

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = \pm 2$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0{,}5$

$X_0 = \{-2; 0{,}5; 2\}$

2) $X^-: f(x) < 0$; $(x^2 - 4)(2x - 1) < 0$

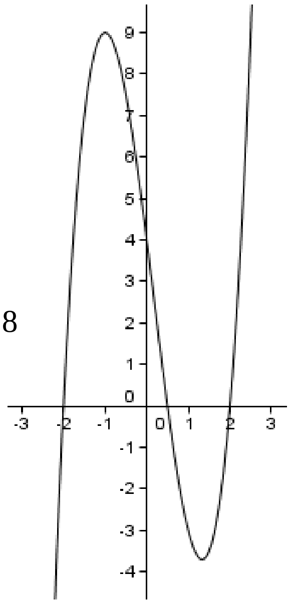
$X^- = (-\infty; -2) \cup (0{,}5; 2)$

3) $f'(x) = 2x \cdot (2x - 1) + (x^2 - 4) \cdot 2 = 4x^2 - 2x + 2x^2 - 8 = 6x^2 - 2x - 8$

4) $X_e: f'(x) = 0$; $6x^2 - 2x - 8 = 0 | : 2$

$3x^2 - x - 4 = 0$; $x_{1;2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \dfrac{1 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1\dfrac{1}{3}$

$x_{max} = -1$; $y_{max}(-1) = -3 \cdot (-3) = 9 \Rightarrow P_{max}(-1; 9)$



Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti funktsiooni uurimise oskust. Põhjendamatult palju eksaminande avas nullkohtade leidmisel funktsiooni avaldises sulud. Ekstreemumkohtadeks pakuti nullkohti, aeti segamini positiivsus(või negatiivsus)piirkond ja kasvamis(või kahanemis)vahemik. Lubamatult palju eksiti ruutvõrrandite lahendamisel. Endiselt on segamini mõisted ekstreemumkoht, ekstreemum ja ekstreemumpunkt. Ei osatud määrata ekstreemumkohtade liiki.

4. (10 punkti) Kaks kiirabiautot kiirustavad sündmuskohtadele, väljudes samaaegselt haiglast ja sõites mööda maanteed vastupidistes suundades. Esimese minutiga läbivad mõlemad autod 1 km. Iga järgmise minutiga läbib esimene auto $\frac{1}{12}$ km võrra ja teine $\frac{1}{6}$ km võrra pikema teelõigu kui eelmise minutiga. Mitme minuti pärast on autod teineteisest 23 km kaugusel ja mis on sellel ajahetkel autode kiirused $\left(\frac{km}{h}\right)$?

Lahendus. Autode poolt iga minutiga läbitud teepikkused moodustavad 2 aritmeetilist jada.

I auto: $a_1 = 1$ km; $d = \frac{1}{12}$ km

II auto: $a_1{*} = 1$ km; $d{*} = \frac{1}{6}$ km

Teksti põhjal: $S_n + S_n{*} = 23\,\text{km}$

Teades, et $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$, saame võrrandi:

$$\frac{2\cdot 1 + \frac{1}{12}(n-1)}{2}\cdot n + \frac{2\cdot 1 + \frac{1}{6}(n-1)}{2}\cdot n = 23$$

$$n\cdot\left(1 + \frac{1}{24}n - \frac{1}{24} + 1 + \frac{1}{12}n - \frac{1}{12}\right) = 23 \Rightarrow n^2 + 15n - 184 = 0; n_{1;2} = -7{,}5 \pm \sqrt{7{,}5^2 + 184} = -7{,}5 \pm 15{,}5;$$

$n_1 = 8$ minutit; $n_2 = -23$ (võõrlahend)

Kontroll. I auto läbib 8 minutiga (kohtumishetkeks) $S_8 = \dfrac{2\cdot 1 + \frac{1}{12}\cdot 7}{2}\cdot 8 = 10\frac{1}{3}$ km ja II auto

$S_8{*} = \dfrac{2\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 7}{2}\cdot 8 = 12\frac{2}{3}$ km. Kokku: $10\frac{1}{3} + 12\frac{2}{3} = 23$ km.

Leiame autode kiirused kohtumishetkel.

Teades, et $a_8 = a_1 + 7d$ ja $v = \dfrac{s}{t}$, siis $a_8 = 1 + 7\cdot\dfrac{1}{12} = 1\dfrac{7}{12}$ km ja $v_1{*} = \dfrac{1\frac{7}{12}}{\frac{1}{60}} = 95\dfrac{km}{h}$

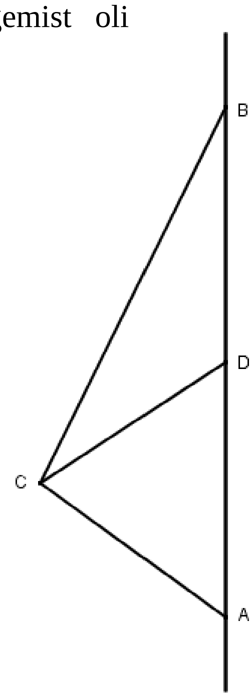
ning

$a_8{*} = 1 + 7\cdot\dfrac{1}{6} = 2\dfrac{1}{6}$ km ja $v_1 = \dfrac{2\frac{1}{6}}{\frac{1}{60}} = 130\dfrac{km}{h}$

Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti eksaminandide funktsionaalset lugemisoskust ja aritmeetilise jada tundmist. Üks osa eksaminande ei saanud ülesande tekstist üldse aru ja ülesanne jäeti lihtsalt lahendamata, teine osa eksaminande tundis ära, et ülesande lahendamiseks tuleb kasutada aritmeetilist jada, kuid ei teatud vastavaid valemeid. Kiiruste arvutamisel oli jällegi probleemiks tulemuse kriitiline hindamine – vaatamata sellele, et tegemist oli kiirabiautodega, ei saa ju nende kiirus kohtumishetkel olla näiteks 1000 km/h.

5. (10 punkti) Sirge tee ääres asuvad talud *A, B* ja *D.* Iga talu juurest viib otsetee postkontorisse *C* (vt joonist). Kulude kokkuhoiu eesmärgil otsustas vallavalitsus sulgeda liiklemiseks teed *AC* ja *BC* ning jätkata vaid teede *AB* ja *CD* hooldamist. Plaanil mõõtkavaga 1 : 20 000 on tee *AB* pikkus 93 mm.

Teades, et teede *AD* ja *DB* pikkus on võrdne ning $\angle CAB = 53^\circ$ ja $\angle ABC = 25^\circ$, leidke, mitme kilomeetri võrra pikeneb teede sulgemise tõttu talude *A* ja *B* elanike teekond postkontorisse *C*? Lõppvastus andke täpsusega 0,01 km.



Lahendus.

Mõõtkava 1: 20 000 s.t 1 cm vastab tegelikkuses 20 000 cm = 200 m = 0,2 km.

Kaardil *AB* = 93 mm s.o tegelikkuses $0{,}2\cdot 9{,}3 = 1{,}86$ km.

- $\angle BCA = 180^\circ - (\angle ABC + \angle CAB)$**;** $\angle BCA = 180^\circ - (25^\circ + 53^\circ) = 102^\circ$

- Siinusteoreemi põhjal: $\frac{|AB|}{\sin\angle BCA}=\frac{|BC|}{\sin\angle CAB}=\frac{|AC|}{\sin\angle ABC}$;

$|BC|=\frac{1{,}86\cdot\sin 53^{\circ}}{\sin 102^{\circ}}\approx 1{,}519$ km; $|AC|=\frac{1{,}86\cdot\sin 25^{\circ}}{\sin 102^{\circ}}\approx 0{,}804$ km.

- Koosinusteoreemi põhjal: $|CD|=\sqrt{|BC|^2+|BD|^2-2|BC||BD|\cos\angle ABC}$ ja

  $|BD|=|AD|=\frac{1}{2}|AB|$;

$|CD|=\sqrt{1{,}519^2+0{,}93^2-2\cdot 1{,}519\cdot 0{,}93\cdot\cos 25^{\circ}}\approx 0{,}782$ km.

- Teekond postkontorisse *C* pikenes:

Talust *A*: $|AD|+|DC|-|AC|\approx 0{,}93+0{,}782-0{,}804\approx 0{,}91$ km võrra.

Talust *B*: $|BD|+|DC|-|BC|\approx 0{,}93+0{,}782-1{,}519\approx 0{,}19$ km võrra.

Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti kolmnurga lahendamise oskust. Eksaminandilt oodati kolmnurga sisenurkade summa teadmist, siinus- ja koosinusteoreem rakendamise oskust. Väga üllatav oli see, et paljud eksaminandid arvasid, et antud kolmnurk on täisnurkne ja lahendasid ülesande Phytagorase teoreemi kasutades (ja seda isegi siis, kui 3. nurk oli õigesti leitud!). Ootamatult problemaatiliseks osutus mõõtkava tundmine ja ümardamine. Etteantud täpsusega tuli ümardada vaid lõppvastus, kuid paljud eksaminandid ümardasid kõiki vahetehteid ja said vastuse, mis oli väga ebatäpne. Jällegi oli tõsiseks probleemiks vastuste kriitiline hindamine – näiteks osade eksaminandide arvates asusid postkontor (või raamatukogu) Kuul (s.t vahemaad olid mitme tuhande kilomeetri pikkused)!

6. (15 punkti) On antud funktsioonid $f(x)=\sin 2x$ ja $g(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

1) Näidake, et $g(x)=-\cos x$.

2) Leidke võrrandi $f(x)=-\cos x$ lahendid, mis asuvad lõigul $[0;2\pi]$.

3) Joonestage ühes ja samas koordinaatteljestikus funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ graafikud ning lahendage joonise põhjal võrratus $f(x)<g(x)$ lõigul $[0;2\pi]$.

Lahendus.

1)

$$g(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x-\cos x\cos\frac{\pi}{3}-$$

$$-\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=-\cos x;$$

2)

$\sin 2x = -\cos x; \quad 2\sin x\cos x + \cos x = 0; \quad \cos x(2\sin x + 1) = 0;$

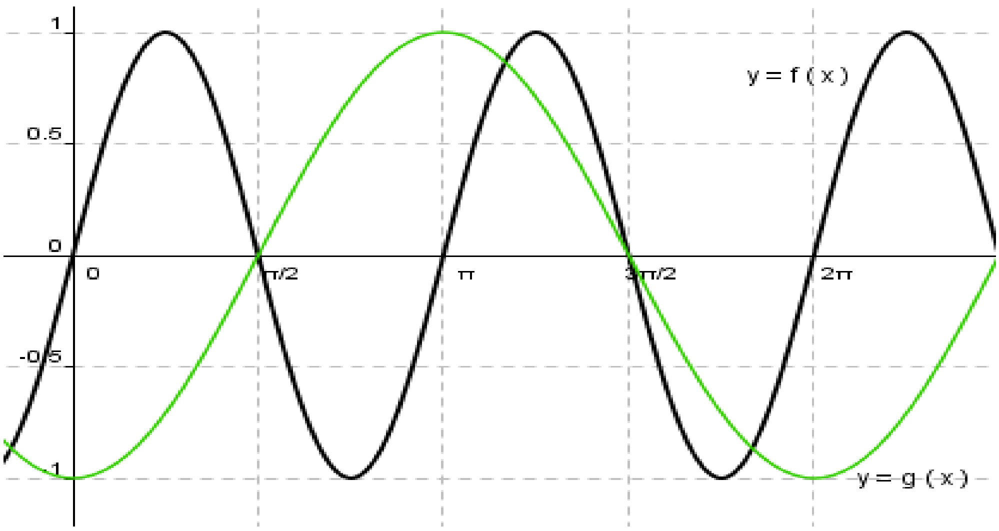
$(1)\cos x = 0; \quad x_1 = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi; n \in Z$

$(2) 2\sin x + 1 = 0;$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}; \quad x_2 = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + n\pi; n \in Z$

Lahendid lõigul $[0;2\pi]$: $x_1 = \dfrac{\pi}{2}; x_2 = \dfrac{3\pi}{2}; x_3 = \dfrac{7\pi}{6}; x_4 = \dfrac{11\pi}{6}$

3) Võrratuse $f(x) < g(x)$ lahendid lõigul $[0;2\pi]$: $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{11\pi}{6}\right)$



Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti trigonomeetrilise avaldise lihtsustamise, trigonomeetrilise võrrandi lahendamise ja trigonomeetriliste funktsioonide graafikute joonestamise ning nende graafikute lugemise oskust. Nagu paljudel varasematel aastatel oli ka nüüd tegemist ühe halvemini lahendatud ülesandega. Väga paljud eksaminandid jätsid selle ülesande lahendamise pooleli või ei lahendanud seda ülesannet üldse s.t võib väita, et trigonomeetrilisi teisendusi ja võrrandeid lahendada oskavad vaid üksikud eksaminandid. Juba mitmeid aastaid on riigieksamil kasutatud praktiliselt ühesuguseid funktsioone, kuid endiselt joonistatakse graafikuteks (sinusoidide asemel) sirgeid või suvalisi kõverjooni. Samuti on endiselt probleemiks võrrandi/võrratuse lahendamine etteantud lõigul.

7. (15 punkti) Ristküliku *ABCD* üheks tipuks on punkt *A*(4; 3), tipp *B* asub *x*-teljel ja küljega *AB* paralleelne külg *CD* asub sirgel $x - y + 7 = 0$.

1) Arvutage ristküliku *ABCD* tippude *B*, *C* ja *D* koordinaadid ning joonestage ristkülik *ABCD* koordinaattasandile.
2) Koostage sirge võrrand, millel asub ristküliku diagonaal *AC*.
3) Arvutage ristküliku *ABCD* ümbermõõdu täpne väärtus.
4) Koostage ristküliku *ABCD* ümberringjoone võrrand.

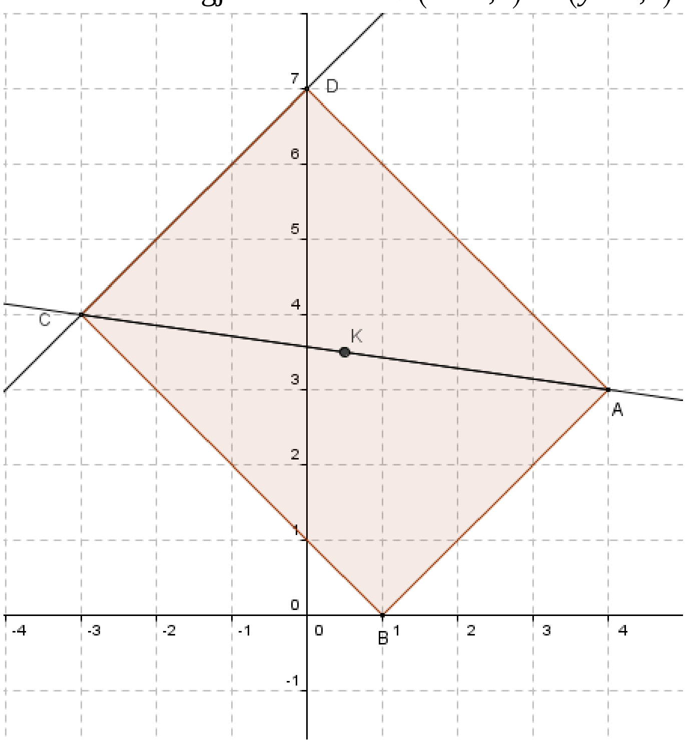
Lahendus.

1) Sirge *CD* tõus $k_1 = 1$. Paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed $\Rightarrow$ sirge *AB* tõus on $k_2 = 1$.
Sirge *AB* võrrand: $y - 3 = 1 \cdot (x-4) \Rightarrow AB: x - y - 1 = 0$.
Kui punkt *B* asub x-teljel, siis *B*(1; 0).
Ristküliku lähisküljed on risti, s.t sirgete *BC* ja *AD* tõusud: $k_{3;4} = -1$.
Sirge *AD* võrrand: $y - 3 = -1 \cdot (x-4) \Rightarrow AD: x + y - 7 = 0$
Sirge *BC* võrrand: $y - 0 = -1 \cdot (x-1) \Rightarrow BC: x + y - 1 = 0$
Punkti *D* koordinaadid: $\begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow D\,(0;\,7)$
Punkti *C* koordinaadid: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C\,(\text{-}3;\,4)$

2) *A*(4; 3) ja *C*(-3; 4). Sirge *AC* võrrand: $\dfrac{x-4}{-3-4} = \dfrac{y-3}{4-3} \Rightarrow AC: x + 7y + 25 = 0$.

3) $|AB| = |CD| = \sqrt{(1-4)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$; $|BC| = |AD| = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$
$P = 2\left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right) = 14\sqrt{2}$

4) Ristküliku *ABCD* ümberringjoone keskpunkt *K* on lõigu *AC* keskpunkt.
$K\left(\dfrac{-3+4}{2};\dfrac{4+3}{2}\right) \Rightarrow K\,(0{,}5;\,3{,}5)$; $r = |AK| = \sqrt{(0{,}5-4)^2 + (3{,}5-3)^2} = \sqrt{12{,}5}$
Ümberringjoone võrrand: $(x-0{,}5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 12{,}5$ või $x^2 + y^2 - x - 7y = 0$



Kommentaarid. Ülesandega kontrolliti kursuse „Vektor tasandil. Joone võrrand“ põhioskuste ja –teadmiste omandatust. See ülesanne oli eksaminandide üks vaieldamatu lemmik. Enamus eksaminande oskasid seda ülesannet vähemalt osaliselt lahendada.

Põhilisteks probleemideks osutusid sirgete paralleelsuse ja ristseisu tunnus, kahe sirge lõikepunkti leidmine, ristküliku külgede pikkuste ja ümbermõõdu arvutamine (tehted juurtega) ja ringjoone võrrandi koostamine.

8. (20 punkti) Ehitatakse risttahukakujuline hoone, mille ruumala on $\boldsymbol{V}$ m^3 . Hoone katus on ristkülik, mille üks külg on teisest 2 korda lühem. Katuse ühe ruutmeetri ehitamine maksab 1250 krooni. Hoone ühe pikema seina ühe ruutmeetri ehitamine läheb maksma 1000 krooni, ülejäänud kolme seina ühe ruutmeetri ehitamine aga 2000 krooni.
1) Avaldage ruumala $\boldsymbol{V}$ kaudu hoone mõõtmed (pikkus, laius, kõrgus), mille korral oleks nimetatud ehitustööde kogumaksumus minimaalne.
2) Arvutage ehitustööde minimaalne maksumus, kui hoone ruumala peab olema 1728 m^3 .

Lahendus.

1) Katuse ehitamine 1250 kr/m^2, pikem sein 1000 kr/m^2 ja ülejäänud 3 seina 2000 kr/m^2.

Olgu x – hoone lühem sein ja h – hoone kõrgus. Hoone ruumala $V = 2x^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{2x^2}$.

Olgu ehitustööde maksumus $A(x)$.

$$A(x) = 2x^2 \cdot 1250 + 2xh \cdot 1000 + (2xh + 2xh) \cdot 2000 = 2500x^2 + 10000xh = 2500x^2 + \frac{5000V}{x} \to$$

min

$$A'(x) = 5000x - \frac{5000V}{x^2}; \quad A'(x) = 5000\left(x - \frac{V}{x^2}\right) = 0; \quad x^3 = V \Rightarrow x = \sqrt[3]{V}.$$

Kontroll, kas on miinimumkoht:

$$A''(x) = 5000 + \frac{10000V}{x^3}; \quad A''(\sqrt[3]{V}) = 5000 + \frac{10000V}{V} = 15000 > 0 \Rightarrow x_{\min} = \sqrt[3]{V}$$

Hoone pikem sein: $2x = 2\sqrt[3]{V}$.

Hoone kõrgus: $h = \dfrac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

2) Kui $V = 1728$ kr/m^2, siis $x = 12$ m ja $h = 6$ m.

Ehitustööde minimaalne maksumus $A = 2500 \cdot 12^2 + 10000 \cdot 12 \cdot 6 = 1080000$ kr

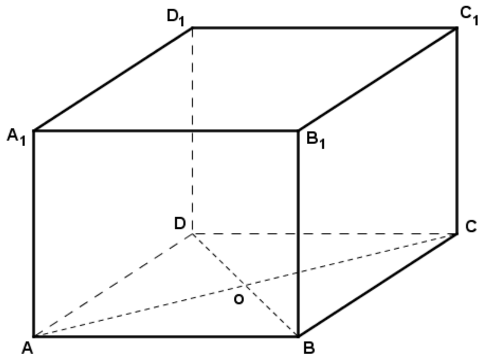
Kommentaarid. Tegemist oli klassikalise ekstreemumülesandega. Eksaminandidelt oodati teksti mõistmist, ülesande tekstis antud andmete põhjal ehitustööde maksumust kirjeldava funktsiooni koostamist ja selle funktsiooni miinimumkoha leidmist. Tõsiseks takistuseks oli risttahuka ruumala valemist ühe tundmatu (kas kõrguse või põhiserva) avaldamine. Väga paljud selle valikülesande valinud eksaminandid lihtsustasid ülesande lahenduskäiku, asendades maksumusfunktsioonis hoone ruumala 2) alapunktis toodud hoone ruumala V väärtusega.

9. (20 punkti) Püströöptahuka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (vt joonist) põhjaks on romb $ABCD$, mille teravnurk $\angle BAD = \alpha$ ja diagonaal $BD = d$. Püströöptahuka diagonaal CA_1 moodustab põhitahuga nurga β.

1) Avaldage püströöptahuka diagonaallõigete pindalad nurkade α ja β ning diagonaali d kaudu.

2) Antud püströöptahukasse on kujundatud püramiid OA_1KL, kus punktid K ja L on vastavalt püströöptahuka servade D_1C_1 ja C_1B_1 keskpunktid ning punkt O on rombi $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt. Leidke püströöptahuka ja püramiidi OA_1KL ruumalade suhe.

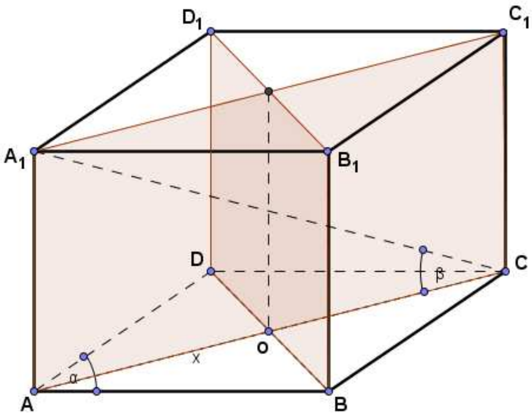
3) Näidake, et sirge $A1O$ on risti sirgega BD.



Lahendus.

1) Rombi diagonaalid jaotavad rombi neljaks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}|AC| = \frac{d}{2\tan\frac{\alpha}{2}}.$$



Rööpküliku diagonaallõigeteks on ristkülikud ja nende pindalad on vastavalt:

$S_1 = |AC|\cdot|AA_1|$ ja $S_2 = |BD|\cdot|AA_1|$

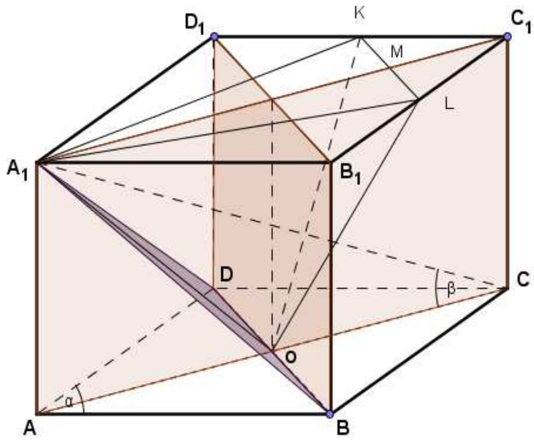
$$\tan\beta = \frac{h}{2x} \Rightarrow h = |AA_1| = 2x\tan\beta = \frac{d\tan\beta}{\tan\frac{\alpha}{2}};$$

$$S_1 = \frac{2d\cdot d\tan\beta}{2\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{d^2\tan\beta}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}; \quad S_2 = \frac{d^2\tan\beta}{\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

2) Püströöptahuka ruumala: $V_1 = \dfrac{|AC|\cdot|BD|}{2}\cdot|AA_1|$; $V_1 = \dfrac{d\cdot d\cdot d\tan\beta}{\tan\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\tan\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{d^3\tan\beta}{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.

Püramiidi ruumala: $V_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{|A_1M|\cdot|KL|}{2}\cdot|AA_1|$;

KL on kolmnurga $B_1C_1D_1$ kesklõik $\Rightarrow |KL| = \dfrac{1}{2}d$;



$$|C_1M| = \frac{1}{4}|AC| \Rightarrow |A_1M| = \frac{3}{4}|AC| = \frac{3d}{4\tan\frac{\alpha}{2}};$$

$$V_2 = \frac{1\cdot 3d\cdot d\cdot d\tan\beta}{3\cdot 4\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{d^3\tan\beta}{16\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$V_1 : V_2 = 8:1$

3) Lõige A_1BD on võrdhaarne kolmnurk, kus A_1O on selle kolmnurga alusele *BD* tõmmatud kõrgus, mis on risti alusega või nurga A_1OB projektsioon *AOB* püströöptahuka põhjal on täisnurk. Täisnurga projektsioon on tasandil täisnurk siis ja ainult siis, kui täisnurga üks haar asub tasandil või on sellega paralleelne ja teine haar ei ole risti tasandiga (kolme ristsirge teoreem).

Kommentaarid. Ülesanne kontrollis „Stereomeetria" kursuse põhioskuste ja –teadmiste omandatust. Igal aastal on stereomeetria ülesanne kõige halvemini lahendatud ülesanne. Ka sel aastal juhtus nii, et matemaatiliseks korrektse ja õige lahenduseni jõudsid kahjuks vähesed. Enamus selle ülesande valinud eksaminande oskas vaid joonisele algandmeid märkida. Mõiste diagonaallõige (ja selle pindala) oli juba tõsiseks probleemiks. Prisma ja püramiidi valemeid teati hästi, aga konkreetses ülesandes neid kasutada ei osatud. 3) alapunkti kohta tuleb märkida, et ilmselt ei ole paljud eksaminandid harjunud matemaatilist teksti lugema, teksti sisu ja esitatud küsimus jäid neile arusaamatuks ning selletõttu ei osatud ka vastata (kuigi vastust tegelikult teati).

<u>2008/2009 õ-a matemaatika riigieksami ülesannete vastused</u>

I osa

$\frac{4}{a^2b^3}$; 2	$-\frac{4}{a^3b^2}$; – 1
8; $\frac{2}{3};\frac{32}{69};\frac{1}{11}$	16; $\frac{1}{3};\frac{32}{69};\frac{150}{253}$
$x_1 = 0{,}5; x_{2;3} = \pm 2$ $X^- = (-\infty;-2)\cup(0{,}5;2)$ $f'(x) = 6x^2 - 2x - 8$ $P_{\max}(-1;9)$	$x_1 = -0{,}5; x_{2;3} = \pm 2$ $X^+ = (-2;-0{,}5)\cup(2;\infty)$ $f'(x) = 6x^2 + 2x - 8$ $P_{\min}(1;-9)$
8 minuti pärast 130 km/h; 95 km/h	8 minuti pärast 95 km/h; 130 km/h
0,91 km; 0,19 km	0,19 km; 0,91 km

II osa

$x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{7\pi}{6}; x_3 = \frac{3\pi}{2}; x_4 = \frac{11\pi}{6}$ $x \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right)$	$x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{7\pi}{6}; x_3 = \frac{3\pi}{2}; x_4 = \frac{11\pi}{6}$ $x \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right)$
B(1; 0); *C*(-3; 4); *D*(0; 7) *CD*: $x + 7y - 25 = 0$ $14\sqrt{2}$ $(x-0{,}5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 12{,}5$	*B*(0; 7); *C*(3; 4); *D*(-1; 0) *AC*: $x - 7y - 25 = 0$ $14\sqrt{2}$ $(x+0{,}5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 12{,}5$
$x = \sqrt[3]{V}$; $2x = 2\sqrt[3]{V}$; $h = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$ 1323000 kr	$x = \sqrt[3]{V}$; $2x = 2\sqrt[3]{V}$; $h = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$ 1080000 kr

$S_1 = \dfrac{d^2 \tan\beta}{\tan^2 \dfrac{\alpha}{2}}$; $S_2 = \dfrac{d^2 \tan\beta}{\tan \dfrac{\alpha}{2}}$ 8:1	$S_1 = \dfrac{d^2 \tan\alpha}{\tan^2 \dfrac{\beta}{2}}$; $S_2 = \dfrac{d^2 \tan\alpha}{\tan \dfrac{\beta}{2}}$ 1:8

<u>Soovitusi 2010. a matemaatika riigieksamiks valmistumiseks</u>

Matemaatika riigieksamiks valmistumine on pikaajaline ja pidev töö. Ainult siis saavutatakse eksamil soovitud tulemus. Eksamiks vajalikke teadmisi ja oskusi ei ole võimalik omandada ühe päeva või nädalaga.

Eksaminandil on vaja selgeks õppida põhimõisted ning aru saada teoreemidest, valemitest ja meetoditest. Teoreemid, valemid ja lahendusmeetodid jms jäävad meelde seda paremini, mida rohkem nende kohta ülesandeid lahendatakse. Ülesandeid leiab õpikutest, erinevatest ülesannete kogudest ning kindlasti tuleks lahendada ja analüüsida eelmiste aastate riigieksamite ülesandeid.
Õppematerjali eksamiks valmistumiseks leiab piisavalt. Näiteks:

- T. Tõnso, A. Veelmaa „Matemaatika X, XI, XII klassile“; Mathema
- L. Lepmann, T. Leppmann, K. Velsker „Matemaatika X, XI, XII klassile“; Koolibri
- E. Abel, E. Jõgi, E. Mitt „Matemaatika ülesannete kogu keskkoolile“; Koolibri
- L. Lepmann, T. Lepmann, H.-M. Varul „Ülesandeid gümnaasiumi matemaatika lõpueksamiks valmistumisel“; Koolibri
- H. Uudelepp, A. Lõhmus „Eksaminandile matemaatika riigieksamist“ ; Argo
- H. Afanasjev „Valmistu iseseisvalt matemaatika riigieksamiks“; Avita
- A. Lind „Mr Matemaatika“; Avita